جامعة البعث	امتحان مقرر ميكانيك ٢	اسم الطالب :
كليـــة العلوم	سنة ثالثة رياضيات	العلامة : 100 (مائة) درجة
قســم الرياضيات	الفصل الأول 2010 – 2011	المدة : ساعتان

السؤال الأول : (33 درجة) : اكتب أرقام البنود الصحيحة فقط على ورقة الإمتحان مما يلي: (توزع الدرجات على عدد البنود الصحيحة)

- **هندسة الكتل:**

I - إذا كان الجسم الصلب S (في حالته العامة) منسوبا لجملة مقارنة نظامية $OXYZ$ ، فبشكل عام يكون:

1) $I_O = I_X + I_Y$ ، 2) $I_O = I_Y + I_{ZY}$ ، 3) $I_O = I_Y + I_{XZ}$ ، 4) $I_X = I_{XY} + I_{XZ}$ ،
5) $I_Y = I_{XY} + I_{XZ}$ ، 6) $I_X \le I_Y + I_Z$ ، 7) $I_X \ge I_Y - I_Z$ ، 8) $I_X > I_{XY} + I_{XZ}$ ،
9) $I_Y < I_{XY} + I_{YZ}$ ، 10) $I_X \ge I_X - I_Z$ ، 11) $I_O = I_X + I_Y + I_Z$ ، 12) $I_O = \frac{1}{2}(I_{XY} + I_{YZ} + I_{ZX})$
13) $I_O = \frac{1}{2}(I_X + I_Y + I_Z)$ ، 14) $I_O = I_{XY} + I_{YZ} + I_{ZX}$.

II - إذا كان الجسم الصلب صفيحة مستوية واقعة في المستوي OXY ، فإن:

15) $I_X = I_{YZ}$ ، 16) $I_X = I_O$ ، 17) $I_{XY} = 0$ ، 18) $I_{XY} < 0$ ، 19) $I_Y = I_{YZ}$ ، 20) $I_z = I_O$
21) $I_O > I_X + I_Z$ ، 22) $I_O = I_X + I_Y$ ، 23) $I_Z < I_X + I_Y$ ، 24) $I_X < I_Z + I_Y$ ،
25) $I_Y > I_X - I_Z$ ، 26) $I_Z = I_X - I_Y$ ، 27) $I_Y - I_Z > 0$ ، 28) $I_Y + I_Z < 0$ ، 29) $I_Z - I_X > 0$

- **الحركة :**

III – الحركة العامة لجسم صلب: إذا كان الجسم الصلب S يتحرك طليقا في الفضاء $\Re^3$ فيتعين موضعه بمعرفة:

30) ثلاثة وسطاء مستقلة ، 31) أربعة وسطاء مستقلة ، 32) موضع ثلاث نقاط منه ليست على استقامة واحدة ، 33) موضع ثلاث نقاط منه على مستقيم واحد

34) ستة وسطاء مستقلة هي: ثلاثة إحداثيات لنقطة معينة منه وثلاث زوايا هي: φ توافق دوران الترنح حول الشاقول ، θ توافق دوران التأرجح حول خط العقد ، ψ توافق الدوران الذاتي حول محور من الجسم الصلب (أو متماسك معه).

IV – الحركة المستوية لجسم صلب : إذا كان الجسم الصلب S يتحرك حركة مستوية في $\Re^2$ ، عندئذ يتعين :

35) موضع S بمعرفة أربعة وسطاء مستقلة هي: ثلاثة إحداثيات لنقطة معينة منه وزاوية دورانه حول هذه النقطة في مستوي الحركة ،

36) موضع S بمعرفة ثلاثة وسطاء مستقلة هي: إحداثيان لنقطة معينة منه وزاوية دورانه حول هذه النقطة في مستوي الحركة ،

37) حقل السرع بالعلاقة : $\vec{V}(M) = \vec{V}(O_S) + \overline{O_S M} \wedge \dot{\vec{\varphi}} \; ; \forall M \in S$ ،

38) حقل التسارعات بالعلاقة : $\vec{\Gamma}(M) = \vec{\Gamma}(O_S) + \ddot{\vec{\varphi}} \wedge \overline{O_S M} - \dot{\varphi}^2 \, \overline{O_S M} \; ; \forall M \in S$ ،

V- الحركة الدورانية لجسم صلب S حول محور ساكن منه: إذا كان الجسم S يدور حول محور ساكن منه، عندئذ يتعين:

40) موضع S بثلاثة وسطاء مستقلة ، 41) موضع S بوسيطين مستقلين ، 42) موضع S بوسيط مستقل واحد هو زاوية الدوران حول هذا المحور ، 43) حقل السرع بالعلاقة: $\vec{V}(M) = \vec{V}(O_S) + \dot{\vec{\varphi}} \wedge \overline{O_S M} \; ; \forall M \in S \, , \; \vec{V}(O_S) \neq 0$ ،

44) حقل السرع بالعلاقة : $\vec{V}(M) = \dot{\vec{\varphi}} \wedge \overline{OM} \; ; \forall M \in S$ ، 45) حقل السرع بالعلاقة $\vec{V}(M) = \overline{O_S M} \wedge \dot{\vec{\varphi}} \; ; \forall M \in S$

حيث φ زاوية الدوران.

VI – الحركة الدورانية حول نقطة من الجسم: إذا كان الجسم الصلب S يتحرك حول نقطة ساكنة منه عندئذ يصح مايلي:

46) $\vec{\varepsilon}$ و $\vec{\omega}$ على نفس الحامل بشكل عام ، 47) $\vec{\varepsilon}$ و $\vec{\omega}$ على حاملين متقاطعين ، 48) $\vec{\varepsilon}$ و $\vec{\omega}$ متعامدان إذا كان : $|\vec{\omega}| = const$.

السؤال الثاني : (23 درجة) : يتحرك القضيب AB في المستوي الساكن OXY ، بحيث يستند هذا القضيب على محيط دائرة ساكنة $\Gamma(G,r)$ ، يمسها OX في O ، بينما طرفه A ينزلق على المحور OX ، والمطلوب:

1) أوجد الوسطاء المستقلة الكافية لتعيين موضع القضيب مع رسم الشكل المناسب، مبيناً عليه هذه الوسطاء المستقلة.
2) أوجد المركز الآني للدوران ثم أوجد كلاً من منحني القاعدة ومنحني المتدحرج.

السؤال الثالث : (20 درجة) :جسم صلب بشكل مخروط دوراني متجانس كتلته M ونصف قطر قاعدته R وارتفاعه h ، والمطلوب:

1) ارسم الشكل المناسب في جملة نظامية $OXYZ$ ، حيث OZ ينطبق على حامل الارتفاع و O رأس المخروط.
2) أوجد سطح مجسم العطالة لهذا المخروط ، 2) أوجد مركز كتل هذا المخروط.

السؤال الرابع : (24 درجة) : إذا كان الجسم الصلب مخروطا دورانيا ، يتحرك في جملة المقارنة النظامية الساكنة $OXYZ$، بحيث يكون رأس المخروط ساكنا في O وأحد أقطار قاعدة المخروط يبقى دائما موازيا للمستوي الأفقي OXY ، فالمطلوب مايلي:

1) إيجاد عدد الوسطاء المستقلة الكافية لتعيين حركة المخروط ، وتسميتها، ورسم الشكل المناسب الذي يبينها.
2) أوجد كلا من سطح المتدحرج وسطح القاعدة ، علماً أن كلاً من الوسطاء المستقلة يتناسب طرداً مع الزمن .

تمنياتي لكم بالتوفيق و النجاح حمص 27 / 01 / 2011 م. مدرس المادة ، د.كامل محمد

جامعة البعث | امتحان مقرر ميكانيك2 | الاسم :
كلية العلوم | العام الدراسي 2010 –2011 | الرقم :

السنة الثالثة– رياضيات –فصل ثالث

السؤال الأول [26]: حل المسألة التالية :

صفيحة بشكل مثلث متساوي الساقين OAB قاعدته AB ، تتحرك في الفضاء $\mathbf{R}^3$ ، بحيث يبقى رأسها O ثابتاً . إذا كان $\bar{V}(B)$, $\bar{V}(A)$ متجهي سرعتي A , B فبرهن أن :

$$\left|\Pr_{OB}ov\ \bar{V}(A)\right| = \left|\Pr_{OA}ov\ \bar{V}(B)\right|$$

السؤال الثاني [2×37]: حل اثنتين مما يلي :

1) إن القضيب AB يتحرك في المستوي المنسوب للجملة النظامية الثابتة OXY بحيث ينزلق A على OX و B على OY و أن $|AB| = 2L$. المطلوب :

أ) أوجد الوسطاء المستقلة الكافية لتعيين موضع القضيب مع الرسم المناسب.

ب) عين مسار النقطة P الواقعة على AB في كلٍّ من الحالات التالية:

– إذا كانت النقطة P منطبقة على A ، – إذا كانت النقطة P منطبقة على B ، – إذا كان $|AP| = |BP|$ ، – إذا كان $0 \neq |AP| \neq |BP|$.

جـ) عين المركز الآني لدوران القضيب و منحني المتدحرج و القاعدة .

2) مخروط دوراني يتحرك حول رأسه الثابت O بحيث يبقى قطر معين من أقطار قاعدته موازياً للمستوى الأفقي . المطلوب:

أ) أوجد الوسطاء المستقلة الكافية لتعيين موضع المخروط مع الرسم المناسب.

ب) أوجد مركبات متجه دوران المخروط بدلالة وسطاء الحركة في الفضائين الثابت و المتماسك.

جـ) أوجد سطح مخروط المتدحرج و سطح مخروط القاعدة علماً أن نسبة مشتقي أي وسيطين تساوي ثابت.

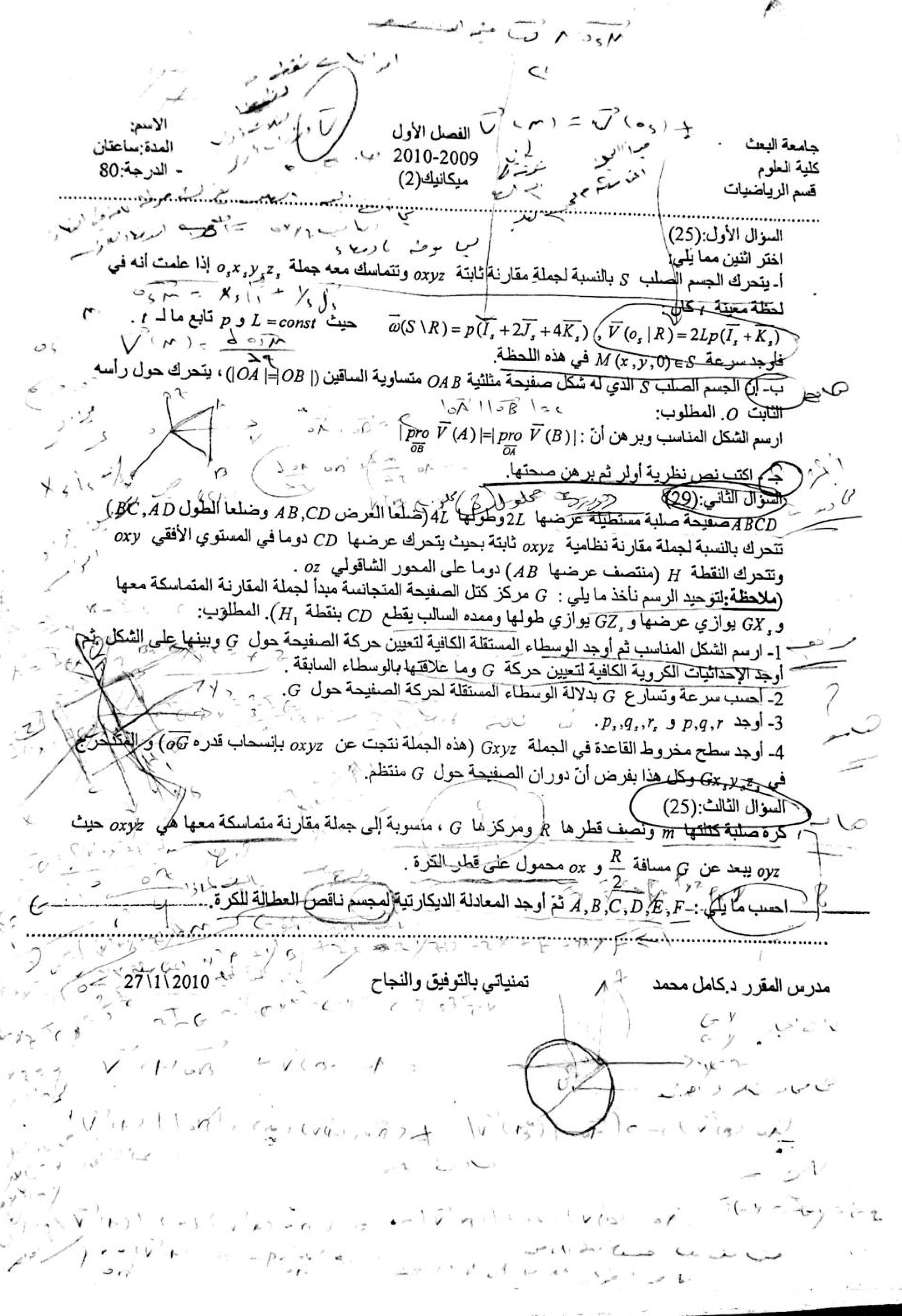
3) سطح مخروطي صلب متجانس منسوب إلى جملة مقارنة نظامية متماسكة معه فيها OZ محور تناظره ، O رأس هذا السطح و كتلته M و ارتفاعه H و نصف قطر قاعدته R . المطلوب:

أ) عين مركز كتل هذا الجسم.

ب) أوجد : $I_O, I_{OX}, I_{OY}, I_{OZ}, I_{OXY}$.

انتهت الأسئلة

حمص 2011/8/22 | د. كامل المحمد



جامعة البعث

كلية العلوم

قسم الرياضيات

الفصل الأول

2010-2009

ميكانيك(2)

الاسم:

المدة:ساعتان

- الدرجة:80

السؤال الأول:(25)

اختر اثنين مما يلي:

أ- يتحرك الجسم الصلب S بالنسبة لجملةِ مقارنة ثابتة $oxyz$ وتتماسك معه جملة $o_s x_s y_s z_s$ إذا علمت أنه في لحظة معينة t كان:

$\overline{\omega}(S \setminus R) = p(\overline{I}_s + 2\overline{J}_s + 4\overline{K}_s)$, $\overline{V}(o_s | R) = 2Lp(\overline{I}_s + \overline{K}_s)$ حيث $L = const$ و p تابع ما لـ t .

فأوجد سرعة $M(x, y, 0) \in S$ في هذه اللحظة.

ب- إن الجسم الصلب S الذي له شكل صفيحة مثلثية OAB متساوية الساقين ($|OA| = |OB|$)، يتحرك حول رأسه الثابت O. المطلوب:

ارسم الشكل المناسب وبرهن أنّ : $|\underset{\overline{OB}}{pro}\ \overline{V}(A)| = |\underset{\overline{OA}}{pro}\ \overline{V}(B)|$

ج- اكتب نص نظرية أولر ثم برهن صحتها.

السؤال الثاني:(29)

$ABCD$ صفيحة صلبة مستطيلة عرضها $2L$ وطولها $4L$ (ضلعا العرض AB, CD وضلعا الطول BC, AD)

تتحرك بالنسبة لجملة مقارنة نظامية $oxyz$ ثابتة بحيث يتحرك عرضها CD دوما في المستوي الأفقي oxy

وتتحرك النقطة H (منتصف عرضها AB) دوما على المحور الشاقولي oz .

(**ملاحظة**:لتوحيد الرسم نأخذ ما يلي : G مركز كتل الصفيحة المتجانسة مبدأ لجملة المقارنة المتماسكة معها و GX_s يوازي عرضها و GZ_s يوازي طولها وممده السالب يقطع CD بنقطة H_1). المطلوب:

1- ارسم الشكل المناسب ثم أوجد الوسطاء المستقلة الكافية لتعيين حركة الصفيحة حول G وبينها على الشكل ثم أوجد الإحداثيات الكروية الكافية لتعيين حركة G وما علاقتها بالوسطاء السابقة .

2- أحسب سرعة وتسارع G بدلالة الوسطاء المستقلة لحركة الصفيحة حول G.

3- أوجد p, q, r و p_s, q_s, r_s.

4- أوجد سطح مخروط القاعدة في الجملة $Gxyz$ (هذه الجملة نتجت عن $oxyz$ بإنسحاب قدره $\overline{oG}$) و المتحرك في $Gx_s y_s z_s$ وكل هذا بفرض أنّ دوران الصفيحة حول G منتظم.

السؤال الثالث:(25)

كرة صلبة كتلتها m ونصف قطرها R ومركزها G ، منسوبة إلى جملة مقارنة متماسكة معها هي $oxyz$ حيث oyz يبعد عن G مسافة $\frac{R}{2}$ و ox محمول على قطر الكرة .

احسب ما يلي:- A, B, C, D, E, F ثمّ أوجد المعادلة الديكارتية لمجسم ناقص العطالة للكرة.

مدرس المقرر د.كامل محمد

تمنياتي بالتوفيق والنجاح

27\1\2010

جامعة البعث
كليـة العلوم
قسـم الرياضيات

امتحان مقرر ميكانيك 2
السنة الثالثة رياضيات
الفصل الثاني من العام الدراسي 2009 / 2010

اسم الطالب :
العلامة : ٨٠ (ثمانون) درجة
المدة : ساعتان

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول : (24 درجة):

جسم صلب له شكل مخروط دوراني متجانس ارتفاعه h، ونصف قطر قاعدته $r=\frac{h}{3}$ ، وكتلته m . إذا نسبنا المخروط إلى جملة مقارنة نظامية $Ox_sy_sz_s$ متماسكة معه ومبدؤها يقع في رأسه ، و Oz_s يمر من رأسه ومركز قاعدته ، فالمطلوب إيجاد ما يلي بأقصر الطرق:

أولاً : إحداثيات مركز كتل المخروط.

ثانياً : عزوم عطالته I_{x_s} و I_{y_s} و I_{z_s}.

ثالثاً : جداءات عطالته $P_{x_sy_s}$ و $P_{y_sz_s}$ و $P_{z_sx_s}$.

السؤال الثاني : (20 درجة) :

سلك دائري مركزه O_1 ونصف قطره R يدور في المستوي الشاقولي حول نقطة ثابتة O من محيطه ويتحرك على محيطه الداخلي قرصٌ دائريٌ نصف قطره $\frac{R}{3}$ ومركزه O_2 ؛ المطلوب :

أولاً : أوجد شرط التدحرج دون انزلاق للقرص على المحيط الداخلي للسلك.

ثانياً : ما هو عدد الوسطاء المستقلة الكافية لتعيين حركة هذا القرص بالنسبة لجملة مقارنة ثابتة مبدؤها O وفيها Ox أفقي يتجه نحو اليمين و Oy شاقولي يتجه نحو أعلى الورقة.

السؤال الثالث : (24 درجة)

جسم صلب بشكل مخروط نصف زاويته الرأسية يساوي $\frac{\pi}{6}$:

أولاً : إذا كان هذا الجسم يتحرك حول رأسه الثابت O بحيث يمر في كل لحظة أحد مولداته من الشاقول ، فأجب على مايلي: ارسم الشكل المناسب وحدد الوسطاء المستقلة الكافية لتعيين الحركة ـــ أوجد مركبات متجه الدوران على كلٍ من محاور الجملة الثابتة و المتحركة مع الجسم .

ثانياً : إذا كان المخروط يتحرك حول رأسه الثابت O وتتم حركته بحيث يوجد دوماً مولدٌ له في المستوي الأفقي الثابت: ارسم الشكل المناسب وحدد الوسطاء المستقلة الكافية لتعيين الحركة ـــ أوجد مركبات متجه الدوران و شرط تدحرج المخروط على المستوي الأفقي الثابت بدون انزلاق وعيّن المحور الآني للدوران.

السؤال الرابع : (12 درجة)

أجب بكلمة صح أو خطأ :

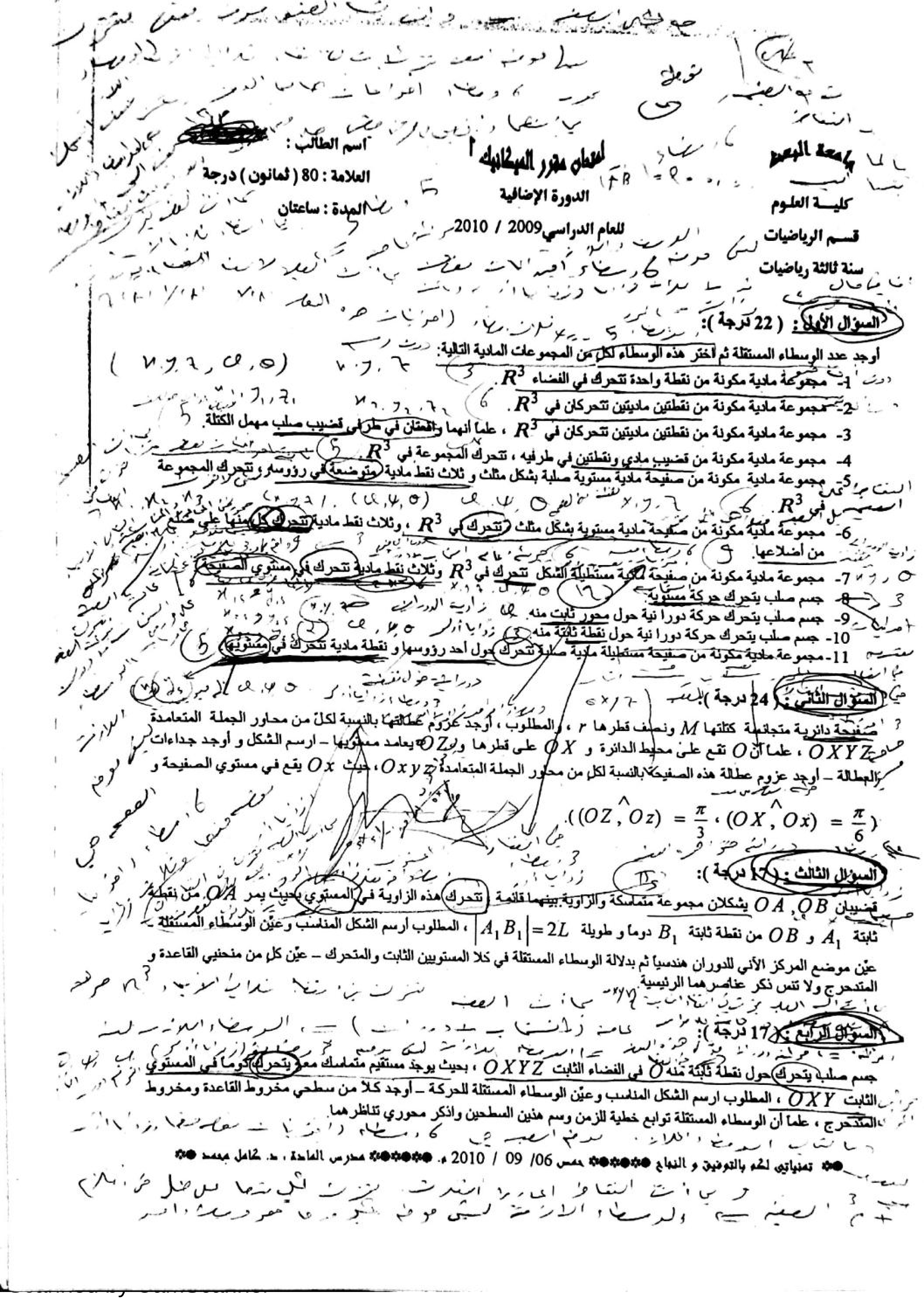
أ) من خصائص عزوم العطالة : $I_x < I_y + I_z$.

ب) يتعيّن موضع الجسم الصلب الطليق في الفضاء - بشكل عام -- بتسعة وسطاء.

ج) يتعيّن موضع الجسم الصلب الطليق في الفضاء - بشكل عام – بستة وسطاء مستقلة.

د) إذا كانت $Oxyz$ جملة مقارنة نظامية وثابتة ، و $Ox_1y_1z_1$ جملة مقارنة طليقة تتحرك في فضاء الجملة الثابتة و M نقطة طليقة تتحرك في فضاء الجملة المتحركة فإن موضع النقطة M يتعين في فضاء الجملة الثابتة بتسعة وسطاء مستقلة.

حمص 10/ 06/ 2010 م. *** تمنياتي لكم بالتوفيق و النجاح *** مدرس المادة : د. كامل محمد ***



جامعة البعث
كليـة العلوم
قسم الرياضيات
سنة ثالثة رياضيات

امتحان مقرر الميكانيك ٢
الدورة الإضافية
للعام الدراسي 2009 / 2010

اسم الطالب :
العلامة : 80 (ثمانون) درجة
المدة : ساعتان

السؤال الأول : (22 درجة):

أوجد عدد الوسطاء المستقلة ثم اختر هذه الوسطاء لكل من المجموعات المادية التالية:

1- مجموعة مادية مكونة من نقطة واحدة تتحرك في الفضاء R^3 .
2- مجموعة مادية مكونة من نقطتين ماديتين تتحركان في R^3 .
3- مجموعة مادية مكونة من نقطتين ماديتين تتحركان في R^3 ، علماً أنهما واقعتان في طرفي قضيب صلب مهمل الكتلة.
4- مجموعة مادية مكونة من قضيب مادي ونقطتين في طرفيه ، تتحرك المجموعة في R^3 .
5- مجموعة مادية مكونة من صفيحة مادية مستوية صلبة بشكل مثلث و ثلاث نقط مادية متوضعة في رؤوسه و تتحرك المجموعة في R^3 .
6- مجموعة مادية مكونة من صفيحة مادية مستوية بشكل مثلث تتحرك في R^3 ، وثلاث نقط مادية تتحرك كل منها على ضلع من أضلاعها.
7- مجموعة مادية مكونة من صفيحة مادية مستطيلة الشكل تتحرك في R^3 وثلاث نقط مادية تتحرك في مستوي الصفيحة.
8- جسم صلب يتحرك حركة مستوية.
9- جسم صلب يتحرك حركة دورا نية حول محور ثابت منه.
10- جسم صلب يتحرك حركة دورا نية حول نقطة ثابتة منه.
11- مجموعة مادية مكونة من صفيحة مستطيلة مادية صلبة تتحرك حول أحد رؤوسها و نقطة مادية تتحرك في مستويها.

السؤال الثاني : (24 درجة):

صفيحة دائرية متجانسة كتلتها M ونصف قطرها r ، والمطلوب ، أوجد عزوم عطالتها بالنسبة لكل من محاور الجملة المتعامدة $OXYZ$ ، علماً أن O تقع على محيط الدائرة و OX على قطرها و OZ يعامد مستويها – ارسم الشكل و أوجد جداءات العطالة – أوجد عزوم عطالة هذه الصفيحة بالنسبة لكل من محاور الجملة المتعامدة $Oxyz$ ، حيث Ox يقع في مستوي الصفيحة و $((OZ\hat{,}Oz)=\frac{\pi}{3}، (OX\hat{,}Ox)=\frac{\pi}{6})$.

السؤال الثالث : (17 درجة):

قضيبان OA , OB يشكلان مجموعة متماسكة والزاوية بينهما قائمة ، تتحرك هذه الزاوية في المستوي بحيث يمر OA من نقطة ثابتة A_1 و OB من نقطة ثابتة B_1 دوماً و طويلة $|A_1B_1|=2L$ ، المطلوب أرسم الشكل المناسب وعيّن الوسطاء المستقلة – عيّن موضع المركز الآني للدوران هندسياً ثم بدلالة الوسطاء المستقلة في كلا المستويين الثابت والمتحرك – عيّن كلاً من منحنيي القاعدة و المتدحرج ولا تنس ذكر عناصرهما الرئيسية.

السؤال الرابع : (17 درجة):

جسم صلب يتحرك حول نقطة ثابتة منه O في الفضاء الثابت $OXYZ$ ، بحيث يوجد مستقيم متماسك معه يتحرك دوماً في المستوي الثابت OXY ، المطلوب ارسم الشكل المناسب وعيّن الوسطاء المستقلة للحركة – أوجد كلاً من سطحي مخروط القاعدة ومخروط المتدحرج ، علماً أن الوسطاء المستقلة توابع خطية للزمن وسم هذين السطحين واذكر محوري تناظرهما.

تمنياتي لكم بالتوفيق و النجاح حمص 06/ 09 / 2010 م. مدرس المادة : د. كامل محمد

جامعة البعث — امتحان الفصل الأول — مقرر: ميكانيك ٢

كلية العلوم — ٢٠٠٨ - ٢٠٠٩ — المدة: ساعتان

قسم الرياضيات — الدرجة: ٨٠

س١: جسم صلب بشكل صفيحة مثلثية OAB متساوية الساقين تتحرك هذه الصفيحة حول رأسها الثابت O. برهن أن: $pr_{\overrightarrow{OB}} \vec{V}(A) = pr_{\overrightarrow{OA}} \vec{V}(B)$.

ب: مكعب $ABCD, A'B'C'D'$ يتحرك في الفضاء $OXYZ$ بحيث يبقى الرأس A ملازماً لسطح الكرة $x^2+y^2+z^2=a^2$ و AB يبقى موازياً OZ و AA' يبقى مماساً OXZ. [6]

المطلوب: ١- ما نوع حركة المكعب مع التعليل.

٢- أوجد سرعة الرأس C بدلالة الوسطاء المستقلة الكافية لتعيين الوضع.

س٢: OO_1 قضيب يتحرك حول O (الثابتة) في المستوي الثابت OXY ويرتبط في O_1 طرف قضيب آخر بشكل مفصلي (وليكن O_1M) بحيث يستطيع الحركة حول O_1 في المستوي OXY. إذا علمت أن قيمة متجه دوران القضيب OO_1 حول O هي φ وقيمة متجه دوران القضيب O_1M حول O_1 هي θ وأن $\varphi \neq \theta$ و $|OO_1|=a$، $|O_1M|=b$، فالمطلوب: استخدم مفاهيم تركيب الحركات في إيجاد ما يلي: ١- السرعة المطلقة بدلالة مركباتها في المستوي الثابت OXY. [24]

٢- التسارع المطلق بدلالة مركباته في المستوي الثابت OXY.

ج: يتحرك جسم صلب حول نقطة ثابتة منه O وفق القانون الزمني: $\theta = \frac{\pi}{3}$، $\psi = nt$، $\varphi = ant + \frac{\pi}{2}$; $a, n \in R$ [18]

١- أوجد مركبات $\vec{\omega}$ في الفضائين الثابت والمتحرك.

٢- أوجد معادلتي سطحي كل من مخروط التدحرج ومخروط القاعدة ثم أوجد قيمة a ليكون المستوي ... سطح مخروط القاعدة.

ب: ... جانبي لمخروط دوراني متجانس كتلته M ونصف قطر قاعدته R وارتفاعه h أوجد: عزوم العطالة بالنسبة لكل من المحاور OX, OY و OZ، وعزوم العطالة ... رأسه و OZ محور تناظره. [22]

وبشكل مساو... سطحي ناقص الدوران ...

مدرس المقرر: د. ...

مع تمنياتنا بالنجاح

ماجد ياسين

جامعة البعث	الفصل الثاني	المادة: ميكانيك 2
كلية العلوم	2009-2008	المدة: ساعتان
قسم الرياضيات	السنة الثالثة	الدرجة: 80

أجب عن الأسئلة التالية

الدرجة : 16

السؤال الأول :

نفترض أنّ القضيب AB الذي طوله L يتحرك في المستوي المنسوب لجملة عطالية نظامية OXY بحيث يبقى طرفه A ملازما للمحور OX وطرفه B ملازما للمحور OY المطلوب:

1. ارسم الشكل المناسب وأثبت أنّ درجة حرية هذا القضيب تساوي واحد .
2. إذا علمت أنّ V قيمة متجه سرعة A على OX في لحظة ما t فأوجد متجه سرعة B على OY في نفس اللحظة t .
3. إذا كانت M نقطة ما من القضيب وطول AM يساوي λ فأوجد معادلة مسارها و أوجد سرعتها بدلالة الوسطاء المستقلة الكافية لتعيين موضع القضيب .

الدرجة : 24

السؤال الثاني:

يتحرك قضيب AB متجانس كتلته M و طوله 2L ، في المستوي المنسوب إلى جملة عطالية نظامية OXY بحيث يستند هذا القضيب على محيط دائرة ثابتة (C , R) و OX مماس لها في O بينما ينزلق الطرف A على OX بسرعة ثابتة قيمتها V . المطلوب :

1. ارسم الشكل المناسب و أوجد عدد الوسطاء المستقلة الكافية لتعيين موضع القضيب في المستوي ، وحددها .
2. عين سرعة مركز ثقل القضيب G بدلالة الوسطاء المستقلة .
3. أوجد المركز الآني للدوران و منحني القاعدة ومنحني المتدحرج .

الدرجة : 24

السؤال الثالث :

كرة صماء متجانسة كتلتها M ونصف قطرها r ، و جملة المقارنة النظامية OXYZ متماسكة معها علما أن O نقطة من سطحها و OZ محور قطري لها المطلوب :

1. أوجد عزوم العطالة للكرة بالنسبة إلى كل من O, OX,OY,OZ وجداءات العطالة .
2. أوجد المعادلة الديكارتية لسطح ناقص العطالة لهذه الكرة .

الدرجة : 16

السؤال الرابع :

اكتب نص نظرية أولر دالامبير و أثبت صحتها .

انتهت الأسئلة

مدرس المقرر : د. كامل محمد

تمنياتي لكم بالتوفيق و النجاح

جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات
سنة ثالثة

امتحان الفصل الأول
٢٠٠٧ - ٢٠٠٨

المقرر: ميكانيك ٢
الدرجة: ٨٠
المدة: ساعتان

أجب عن الأسئلة التالية

[25] س I - أولاً: اقرأ النصوص اللاحقة بتمعن واذكر عدد الوسطاء المستقلة الكافية لتعيين المجموعة المادية الموافقة مع التعليل، وارسم الشكل المناسب لها مبيناً عليه هذه الوسطاء:

١- OABC صفيحة مستطيلة الشكل تتحرك بحيث يكون رأسها O ثابتاً فقط.

٢- OABC صفيحة مستطيلة تتحرك بحيث يكون رأسها O ثابتاً وأحد ضلعيها المارين من O يبقى دوماً في المستوي الثابت OXY (الأفقي).

٣- قرص دائري صلب نصف قطره r، يتدحرج بدون انزلاق على المحيط الداخلي لسلك دائري ثابت نصف قطره R (حيث $r < R$).

٤- مخروط دوراني صلب نصف قطر قاعدته R وارتفاعه h، يتحرك حول رأسه الثابت O بحيث يتدحرج بدون انزلاق على مستوٍ أفقي ثابت OXY.

٥- مجموعة مادية مكونة من قضيبين يتحركان في مستوٍ ثابت OXY علماً أن القضيب الأول OA يتحرك حول طرفه الثابت O، ويتصل مع أحد طرفي الثاني في A.

[12] س II - أجب بصح أو خطأ وصوّب الخطأ:

× أ) $\vec{V} = b\dot{\theta}\vec{K} + \dot{\theta} \wedge \vec{OM}$ سرعة نقطة M من جسم صلب S يتحرك حول محور ثابت Oz.

ب) $\vec{V} = \vec{V}(O_1) + \vec{\omega} \wedge \vec{O_1M}$ سرعة نقطة M من جسم صلب حيث O_1 نقطة معينة من الجسم و $\vec{\omega}$ متجه دوران الجسم حول O_1.

× ج) $\vec{V}_r = \vec{V}(O_1) + \vec{\omega} \wedge \vec{O_1M}$ سرعة نسبية لنقطة M تتحرك حركة متحركة في الفضاء بالنسبة لجملة ثابتة.

× د) $\vec{V}_r = \dot{x}_1\vec{I}_1 + \dot{y}_1\vec{J}_1 + \dot{z}_1\vec{K}_1$ سرعة جرية لنقطة M تتحرك في الفضاء المنسوب [illegible] بالنسبة لجملة مقارنة للفضاء الثابت OXYZ.

× هـ) $\vec{\Gamma}_e = \vec{\Gamma}(O_1) + \vec{\varepsilon} \wedge \vec{O_1M} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{O_1M})$ تسارع جري لنقطة M تتحرك حركة مركبة.

× و) الخاصة الأساسية لحركة جسم صلب S: $\vec{V}(A) = \vec{V}(B), \forall A, B \in S$.

س III - مخروط دوراني متجانس كتلته m، نصف قطر قاعدته R وارتفاعه h والمطلوب:

أ- I_x و I_y و I_z و P_{yz} و P_{zx} و P_{xy} حيث Oz محور تناظر المخروط و O رأسه.

ب- إذا تحرك المخروط حول رأسه الثابت O بحيث يبقى محور تناظره Oz [illegible] ارسم الشكل المناسب وأوجد p و q و r ثم أوجد المعادلة الديكارتية لكل من سطحي مخروط التدحرج و سطح مخروط القاعدة علماً أن [illegible]

٢٠٠٨/١/٢٠

انتهت الأسئلة

– ١ –

سلم تصحيح امتحان مقرر الميكانيك

الفصل الأول ٢٠٠٧ – ٢٠٠٨

– أربع صفحات –

35

ج١- أ- عدد الوسطاء المستقلة ثلاثة (وسطاء أولر) لأن حركة الصفيحة حركة جسم صلب حول نقطة ثابتة منه O وليس عليها أية قيود أخرى

ب- عدد الوسطاء المستقلة وسيطان لأن حركة الصفيحة حركة جسم صلب حول نقطة ثابتة منه O وأحد أضلاعه يبقى ملازماً للمستوي الأفقي (منطبق على خط العقد OX_1) وهذا القيد ألغى الدوران الذاتي ψ حول OZ_1 وبالتالي بقي الدورانان الترنح φ حول الشاقول والانحراف θ حول خط العقد

ج٣- عدد الوسطاء المستقلة وسيطان لأن القرص يتحرك حركة مستوية تتعين بثلاثة وسطاء هي: إحداثيا مركز الكتلة: $x(c)$ و $y(c)$ وزاوية الدوران حول c وهي φ ولكن c يتحرك على دائرة نصف قطرها R-r ويتعين موضعه بزاوية θ حيث $x(c) = (R-r)\cos\theta$ ، $y(c) = \ldots$

وبالتالي فإنه يبقى وسيطان مستقلان هما φ و θ



٤ - إن عدد الوسطاء المستقلة واحد ، لأن الحركة حركة جسم صلب حول نقطة ثابتة منه O (رأسه) فرض قيدان عليها بقاء أحد مولدات المخروط في المستوي الأفقي OXY فأصبحت زاوية النترجح ثابتة

$\theta = (\widehat{\vec{OZ}, \vec{OZ_1}}) = \frac{\pi}{2} - \alpha$

حيث α نصف الزاوية الرأسية للمخروط . فيبقى دورانان هما الترنح $(\widehat{OZ_1, OZ_2})$ والدوران $\widehat{\psi}$ والشرط الثاني هو التدحرج بدون انزلاق يولد علاقة بينهما وإن فيبقى أحدهما مستقلا والآخر تابعاً له .

٥ - لهذه المجموعة وسيطان مستقلان لأن الحركة مستوية نثبت القضيب OA بثلاثة وسطاء هي احداثيات النقطة O وزاوية الدوران φ حول هذه النقطة لكن O نقطة ثابتة فإحداثياها معلومان وبالتالي يبقى الوسيط φ

أما القضيب AB فإن حركته حركة مستوية تتعين بشكل عام بثلاثة وسطاء هي θ+φ زاوية دورانه حول A وإحداثيا A لكن احداثيا A تابعان لـ φ :

$X(A) = |OA| \cos\varphi$ و $Y(A) = |OA| \sin\varphi$

• إذن يتعين AB بـ θ و φ وهكذا نجد أن القضيبين يتعينان بالوسيطين θ و φ فقط

II 12

أ) خطأ ويمكن تصويبه بأحد الشكلين :

$\vec{V} = b\dot{\theta}\,\vec{K} + \vec{\dot{\theta}} \wedge \vec{OM}$ سرعة نقطة من جسم صلب يتحرك حركة لولبية ... المختزلة (ثابتة) .

او $\vec{V} = \vec{\dot{\theta}} \wedge \vec{OM}$ سرعة نقطة من جسم يدور حول محور ثابت ...
$\vec{\dot{\theta}} \wedge \vec{mM}$ ... m مسقط M على محور الدوران

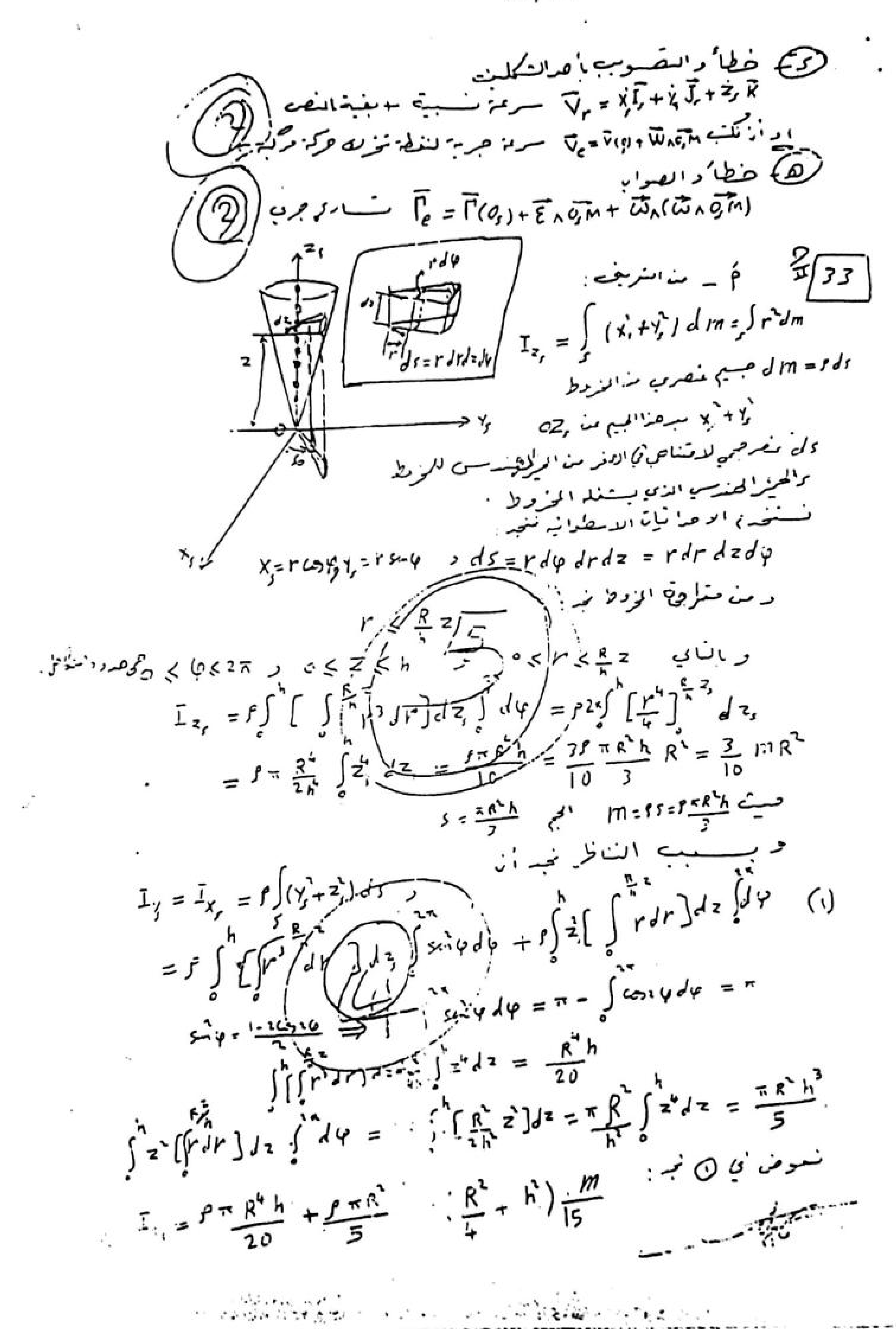
ب) صحيح .

ج) خطأ ونصححه بما يلي :

$\vec{V_e} = \vec{V}(o_1) + \vec{\omega} \wedge \vec{O_1M}$ سرعة جرية

او بالعلاقة $V_r = \dot{x}_1\vec{I}_1 + \dot{y}_1\vec{J}_1 + \dot{z}_1\vec{K}_1$ سرعة نسبية ... $\vec{I}_1, \vec{J}_1, \vec{K}_1$ متجهات الجملة المتحركة والتي تتحرك النقطة M ...

د) خطأ والصواب يكون بإحدى الخاصتين
$\vec{V}(A) = \vec{V}(B)\ \forall A, B \in S$ خاصة لهذه الحركة ...
أو الخاصة الأساسية لحركة جسم صلب وهي ... $\vec{V}(A) = \vec{V}$ ...



(د) خطأ والتصويب بإحدى الكلمات

$\vec{V}_r = \dot{x}_1\vec{I}_1 + \dot{y}_1\vec{J}_1 + \dot{z}_1\vec{K}$ سرعة نسبية + بقية النص

أو إن تكتب $\vec{V}_e = \vec{v}(O_1) + \vec{\omega} \wedge \vec{O_1M}$ سرعة جرية لنقطة تؤلف حركة مركبة

(هـ) خطأ والصواب

$\vec{\Gamma}_e = \vec{\Gamma}(O_1) + \vec{\varepsilon} \wedge \vec{O_1M} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{O_1M})$ تسارع جري

33

م - من التعريف:

$$I_{z_1} = \int_s (x_1^2 + y_1^2)\, dm = \int_s r^2 dm$$

$dm = \rho ds$ جسم عنصري من المخروط

$x_1^2 + y_1^2$ مربع بعد الجسم عن Oz_1

ولنفرض ρ للتناظر في الأعمدة من المركز الهندسي للمخروط والحيز الهندسي الذي يشغله المخروط.

نستخدم الإحداثيات الاسطوانية نجد

$x_1 = r\cos\varphi,\ y_1 = r\sin\varphi$ و $ds = r\,d\varphi\,dr\,dz = r\,dr\,dz\,d\varphi$

ومن معادلة المخروط نجد:

$$r \le \frac{R}{h} z$$

وبالتالي $0 \le r \le \frac{R}{h} z$ و $0 \le z \le h$ و $0 \le \varphi \le 2\pi$ وحدود التكامل.

$$I_{z_1} = \rho \int_0^{2\pi}\left[\int_0^h \left[\int_0^{\frac{R}{h}z} r^3 dr\right] dz_1\right] d\varphi = \rho 2\pi \int_0^h \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{\frac{R}{h}z_1} dz_1$$

$$= \rho\pi \frac{R^4}{2h^4}\int_0^h z_1^4\, dz = \frac{\rho\pi R^4 h}{10} = \frac{3\rho}{10}\frac{\pi R^2 h}{3} R^2 = \frac{3}{10} m R^2$$

حيث $m = \rho s = \rho\frac{\pi R^2 h}{3}$ الحجم $s = \frac{\pi R^2 h}{3}$

وبسبب التناظر نجد أن

$$I_{y_1} = I_{x_1} = \rho\int_s (y_1^2 + z_1^2)\, ds$$

$$= \rho\int_0^h \left[\int_0^{\frac{R}{h}z} r^3 dr\right] dz_1 \int_0^{2\pi} \sin^2\varphi\, d\varphi + \rho\int_0^h z_1^2\left[\int_0^{\frac{R}{h}z} r\,dr\right] dz \int_0^{2\pi} d\varphi \quad (1)$$

$\sin^2\varphi = \frac{1-\cos 2\varphi}{2} \Rightarrow \int_0^{2\pi} \sin^2\varphi\, d\varphi = \pi - \int_0^{2\pi}\cos 2\varphi\, d\varphi = \pi$

$$\int_0^h \left[\int_0^{\frac{R}{h}z} r^3 dr\right] dz = \frac{R^4}{4h^4}\int_0^h z^4 dz = \frac{R^4 h}{20}$$

$$\int_0^h z^2\left[\int_0^{\frac{R}{h}z} r\,dr\right] dz \int_0^{2\pi} d\varphi = \int_0^h \left[\frac{R^2}{2h^2} z^2\right] dz = \pi\frac{R^2}{h^2}\int_0^h z^4 dz = \frac{\pi R^2 h^3}{5}$$

نعوض في ① نجد:

$$I_{y_1} = \rho\pi\frac{R^4 h}{20} + \frac{\rho\pi R^2 h^3}{5} = \left(\frac{R^2}{4} + h^2\right)\frac{3m}{5}$$

$$\dot{P}_{x_1y_1} = \dot{P}_{y_1z_1} = \dot{P}_{z_1x_1} = 0$$

وذلك لان المحاور متناظرة بالنسبة لكل المستويات الإحداثية x_1z_1 ، x_1y_1 ، y_1z_1

ث - عبارة المخروط مع رسم أولر

نفرض في علاقات أولر (أو بالاستعانة بالشكل) θ ثابتة

معادلات [illegible] x_1, y_1, z_1 و xyz ثابت

نجد :

$p_1 = \dot{\varphi} \sin\psi$

$q_1 = \dot{\varphi} \cos\psi$

$r_1 = \dot{\psi}$

$p = \dot{\psi} \sin\varphi$

$q = -\dot{\psi} \cos\varphi$

$r = \dot{\varphi}$

معادلة المحور الآني للدوران في المحاور المتماسكة مع الجسم :

$$\frac{x_1}{p_1} = \frac{y_1}{q_1} = \frac{z_1}{r_1}$$

؛ (حيث (x_1, y_1, z_1) احداثيات نقطة من المحور الآني في المحاور المتماسكة) $\Rightarrow \frac{x_1}{\dot{\varphi}\sin\psi} = \frac{y_1}{\dot{\varphi}\cos\psi} = \frac{z_1}{\dot{\psi}}$

وبحذف الوسيط من هاتين المعادلتين نحصل على معادلة سطح المخروط :

$$x_1^2 + y_1^2 = \frac{\dot{\varphi}^2}{\dot{\psi}^2} z_1^2$$

وهي معادلة سطح مخروطي $\frac{\dot{\varphi}}{\dot{\psi}}$ ظل نصف زاوية الرأس

وبنفس الطريقة نحصل على معادلة سطح القاعدة :

$$\frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \frac{z}{r} \Rightarrow \frac{x}{\dot{\psi}\sin\varphi} = \frac{y}{-\dot{\psi}\cos\varphi} = \frac{z}{\dot{\varphi}} \Rightarrow$$

$$x^2 + y^2 = \frac{\dot{\psi}^2}{\dot{\varphi}^2} z^2$$

وبالتالي سطح القاعدة هو سطح مخروطي ظل نصف زاوية الرأس هو :

سلم تصحيح امتحان الميكانيك
فصل أول

ج: أ- $OXYZ$ جملة مقارنة ثابتة فيها OXY مستوٍ أفقي، $AX_1Y_1Z_1$ جملة مبدؤها مركز الصفيحة ومتماسكة مع القضيب OA حيث AX_1 محمول على القضيب OA و AY_1 موازٍ في مستوي الصفيحة و AZ_1 شاقولي عمودي في مستوي الصفيحة، تعيين حركة الصفيحة بوسيطين مستقلين $\varphi = (\widehat{OX, AX_1})$، $\psi = (AY_1, \overrightarrow{AM})$ حيث نحدد محيط الصفيحة.

15

ب- يمكننا الاجابة بعدة طرق مطلوب من الطالب واحدة منها فقط:

• طريقة الحركة النسبية:

$$\vec{V}(M/R_0) = \vec{V}(A/R_0) + \vec{V}(M/R_A) = \dot{\vec{\varphi}} \wedge \overrightarrow{OA} + \dot{\vec{\psi}} \wedge \overrightarrow{AM}$$

10

وجدنا سابقاً المركبات على محاور R_A أي على محاور R_0 والمطلوب أحدهما فقط:

$$\vec{V}(M/R_0) = -R\dot{\varphi}\cos\psi\,\vec{i}_1 + (L\dot{\varphi} - R\dot{\psi}\sin\psi)\vec{j}_1 + R\dot{\psi}\cos\psi\,\vec{K}_1$$

أو

$$\vec{V}(M/R_0) = -[R\dot{\varphi}\cos\psi\cos\varphi + (L\dot{\varphi} - R\dot{\psi}\sin\psi)\sin\varphi]\vec{i}$$
$$-[R\dot{\varphi}\cos\psi\sin\varphi - (L\dot{\varphi} - R\dot{\psi}\sin\psi)\cos\varphi]\vec{j} + R\dot{\psi}\cos\psi\,\vec{K}$$

واحدة مطلوب

• مفهوم الحركة المركبة للنقطة:

$$\vec{V}(M/R_0) = \vec{V}_e + \vec{V}_r = \dot{\vec{\varphi}} \wedge \overrightarrow{OM} + \dot{\vec{\psi}} \wedge \overrightarrow{AM};$$

فنحصل على نفس الإجابة السابقة

• الطريقة العادية: نحسب $\overrightarrow{OM}$ بدلالة مركباته في R_A أو في R_0:

في R_A

$$\overrightarrow{OM} = L\,\vec{i}_1 + R\cos\psi\,\vec{j}_1 + R\sin\psi\,\vec{K}_1$$

ونشتق زمنياً في R_0 فنحصل على سرعة M بدلالة مركبات في R_A كما في الجواب الأول

أو في R_0

$$\overrightarrow{OM} = L(\cos\varphi - R\cos\psi\sin\varphi)\vec{i} + (L\sin\varphi + R\cos\psi\cos\varphi)\vec{j} + R\sin\psi\,\vec{K}$$

ونشتق زمنياً في R_0 فنحصل على سرعة M في R_0 بدلالة مركباتها على محاور R_0.

ج- نرمز للمستوي $z = -R$ بـ S_0، وللصفيحة بـ S ... شرط التدحرج بدون انزلاق ... نقطة واحدة هندسية (H):

$$\underset{H \in S}{\vec{V}(H/S_0)} = \underset{H \in S_1}{\vec{V}(H/S_0)}$$

$\underset{H \in S_1}{\vec{V}(H/S_0)} = 0$ و $\underset{H \in S}{\vec{V}(H/S_0)} = (L\dot{\varphi} + R\dot{\psi})\,\vec{j}_1$

إذن شرط التدحرج بدون انزلاق: $L\dot{\varphi} + R\dot{\psi} = 0$

5

(A)

عرض ١ المجموعة المسائل / ٢٠٠٧/٠١/٠٩ مسائل ميكانيك ٢ ع ٤ + ٣ ورقة

جامعة البعث — الفصل الدراسي الأول — المادة: ميكانيك ٢
كلية العلوم — ٢٠٠٦ — ٢٠٠٧ — المدة: ساعتان
قسم الرياضيات — سلم تصحيح — الدرجة: ٨٠

30 | ١ـ توجد مجموعة ميكانيكية مكونة مما يلي: OA قضيب أفقي طوله L فيه O مفصل كروي يسمح للقضيب بالدوران حول محور شاقولي ثابت (OZ يتجه نحو الأعلى)، وصفيحة دائرية نصف قطرها R ويتمفصل مركزها مع القضيب في طرفه A بمفصل يجعل مستويها يعامد القضيب دوماً ويسمح لها بالدوران حول القضيب، إذا تحركت هذه المجموعة وفق الإمكانات المذكورة آنفاً فالمطلوب مايلي: أ- ارسم الشكل المناسب واذكر الوسطاء المستقلة الكافية لتعيين حركة الصفيحة في الفضاء الثابت OXYZ. ب- أوجد سرعة نقطة من محيط الصفيحة بدلالة الوسطاء المستقلة لحركتها بالنسبة للفضاء الثابت.

((ملاحظة: من أجل الإجابة عن أ و ب نعتبر محيط الصفيحة لا يستند على أي سطح مادي))

ج- إذا أضفنا إلى متن النص أعلاه الشرط التالي: يستند محيط الصفيحة الخشن في أدنى نقطة منه على مستوٍ أفقي ثابت خشن يمنع الانزلاق فالمطلوب مايلي:

أ- ما هي العلاقة الرياضية بين الوسطاء التي وجدتها في (أ)؟ ب- ما هو العدد الجديد للوسطاء المستقلة الكافية لتعيين حركة الصفيحة؟ ج- استنتج (السرعة) المركز اللحظي للصفيحة.

٢ـ أجب عن اثنين مما يلي ولكل منهما 25:

I- إذا كان π مستوياً ثابتاً و A، B نقطتان ثابتتان فيه والمسافة بينهما 2L وكانت ($O\hat{X_1}, OY_1$) زاوية قائمة صلبة تتحرك في المستوي الثابت بحيث يمر دوماً الضلع OX_1 من النقطة الثابتة A والضلع OY_1 من النقطة الثابتة B فأوجد المنحني القاعدة والمنحني المتدحرج لحركة هذه الزاوية بالطريقة الرئيسية بالتفصيل.

II- OABC صفيحة مربعة الشكل طول ضلعها a تتحرك في الفضاء الثابت حول رأسها O وذلك بحيث يبقى ضلعها OA ملازماً للمستوي الأفقي الثابت. المطلوب:

أ- ارسم الشكل المناسب مبيناً عليه الوسطاء المستقلة الكافية لتعيين حركة الصفيحة

ب- مركبات متجه الدوران على كل من المحاور الثابتة والمتحركة.

ج- إذا كانت السرعة الزاوية للترنح والسرعة الزاوية للدوران ثابتتان فأوجد سطحي مخروط القاعدة والمتدحرج

III- أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$\dot{y}^2 = p^2 (a^2 - y^2)(b^2 + y^2)$$

مدرس المقرر: د. كامل محمد — في ٢٠٠٧/١/١٠

تمت الأسئلة
مع تمنياتي لكم بالنجاح الدائم

سلم تصحيح امتحان الميكانيك ٢

فصل أول

٢٠٠٦ - ٢٠٠٧

الدرجة : [illegible]

١ - أ - $OXYZ$ جملة مقارنة ثابتة فيها OXY مستو أفقي . $AX_1Y_1Z_1$ جملة مرتبطة بمركز الصفيحة ومتماسكة مع القضيب OA حيث AX_1 محمول على القضيب OA و AY_1 محور أفقي في مستوي الصفيحة و AZ_1 شاقولي عمودي في مستوي الصفيحة . تتعين حركة الصفيحة بوسيطين مستقلين $\varphi=(\widehat{OX, AX_1})$ ، $\psi=(\widehat{AY_1, AM})$ حيث تدور حول الصفيحة .

(10 درجات)

ب - يمكننا الإجابة بعدة طرق مطلوب من الطالب واحدة منها فقط :

• طريقة الحركة النسبية : $\vec{V}(M/R_0) = \vec{V}(A/R_0) + \vec{V}(M/R_A) = \dot{\vec{\varphi}} \wedge \vec{OA} + (\dot{\vec{\varphi}} + \dot{\vec{\psi}}) \wedge \vec{AM}$

وحساباتها بدلالة المركبات على محاور R_A أو على محاور R_0 والمطلوب أحدهما فقط :

$$\vec{V}(M/R_0) = -R\dot{\varphi}\cos\psi\,\vec{i}_1 + (L\dot{\varphi} - R\dot{\psi}\sin\psi)\vec{j}_1 + R\dot{\psi}\cos\psi\,\vec{K}_1$$

أو

$$\vec{V}(M/R_0) = -[R\dot{\varphi}\cos\psi\cos\varphi + (L\dot{\varphi} - R\dot{\psi}\sin\psi)\sin\varphi]\vec{i}$$
$$-[R\dot{\varphi}\cos\psi\sin\varphi - (L\dot{\varphi} - R\dot{\psi}\sin\psi)\cos\varphi]\vec{j} + R\dot{\psi}\cos\psi\,\vec{K}$$

(وهو المطلوب)

• مفهوم الحركة المركبة للنقطة :

$$\vec{V}(M/R_0) = \vec{V}_e + \vec{V}_r = \dot{\vec{\varphi}} \wedge \vec{OM} + \dot{\vec{\psi}} \wedge \vec{AM}\ ;$$

فنحصل على نفس الإجابة السابقة .

• الطريقة العادية : نكتب $\vec{OM}$ بدلالة مركباتها في R_A أو في R_0 :

في R_A

$$\vec{OM} = L\,\vec{i}_1 + R\cos\psi\,\vec{j}_1 + R\sin\psi\,\vec{K}_1$$

ونشتق زمنياً في R_0 فنحصل على سرعة M بدلالة مركباتها في R_A كما في الجواب الأول .

أو في R_0

$$\vec{OM} = L(\cos\varphi - R\cos\psi\sin\varphi)\vec{i} + (L\sin\varphi + R\cos\psi\cos\varphi)\vec{j} + R\sin\psi\,\vec{K}$$

ونشتق زمنياً في R_0 فنحصل على سرعة M في R_0 بدلالة مركباتها على محاور R_0 .

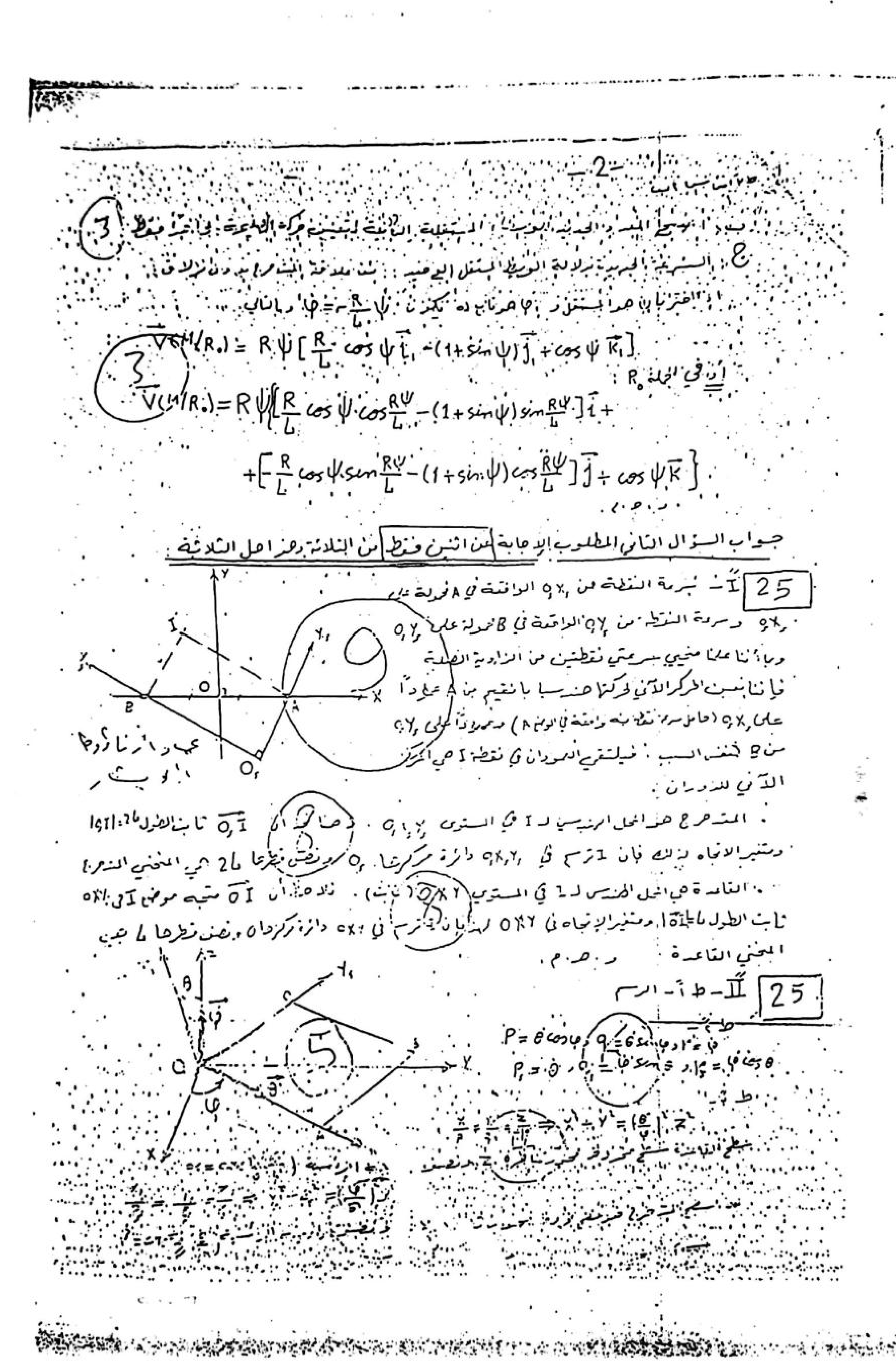
٢ - أ - نرمز للمستوي $z=-R$ بـ S_0 ، وللحلقة بـ S_1 ، وللصفيحة بـ S .

شرط التدحرج بدون انزلاق لنقطة واحدة هندسية (H) :

$$\vec{V}(H/S_0)_{H \in S} = \vec{V}(H/S_0)_{H \in S_1}\ , \quad \vec{V}(H/S_0)_{H \in S_1} = 0\ , \quad \vec{V}(H/S_0)_{H\in S} = (L\dot{\varphi} + R\dot{\psi})\,\vec{i}_1$$

إذن شرط التدحرج بدون انزلاق : $L\dot{\varphi} + R\dot{\psi} = 0$

(4 درجات)



ب - ١ - نوضح المبدأ الجديد للوسيط المستقلة الثابتة لتعيين حركة الجسم ... (3)

إذا افترضنا أن ψ هو المستقل و φ هو تابع له يكون $\varphi = -\frac{R}{L}\psi$ وبالتالي:

$$\vec{V}(M/R_1) = R\dot{\psi}\left[\frac{R}{L}\cos\psi\,\vec{i}_1 - (1+\sin\psi)\vec{j}_1 + \cos\psi\,\vec{k}_1\right]$$

إذاً في الجملة R_0:

$$\vec{V}(M/R_0) = R\dot{\psi}\Big\{\left[\frac{R}{L}\cos\psi\cos\frac{R\psi}{L} - (1+\sin\psi)\sin\frac{R\psi}{L}\right]\vec{i} + \left[-\frac{R}{L}\cos\psi\sin\frac{R\psi}{L} - (1+\sin\psi)\cos\frac{R\psi}{L}\right]\vec{j} + \cos\psi\,\vec{k}\Big\}$$

و.هـ.م.

جواب السؤال الثاني المطلوب الإجابة عن اثنين فقط من الثلاثة وهذا حل الثلاثة:

I - سرعة النقطة من O_1X_1 الواقعة في A محمولة على OX وسرعة النقطة من O_1Y_1 الواقعة في B محمولة على OY وبما أننا نعلم منحى سرعتي نقطتين من الزاوية الصلبة فإننا نعين المركز الآني لحركتها هندسياً بالتقاطع من A عموداً على OX (حامل سرعة نقطة منه واقعة في الموضع A) وعموداً على OY من B لنفس السبب فيلتقي العمودان في نقطة I هي المركز الآني للدوران. (25)

- المتدحرج هو المحل الهندسي لـ I في المستوي $X_1O_1Y_1$، $\overline{O_1I}$ ثابت الطول ومتغير الاتجاه لذلك فإن I ترسم في $O_1X_1Y_1$ دائرة مركزها O_1 ونصف قطرها $2L$ هي المنحني المتدحرج.

- القاعدة هي المحل الهندسي لـ I في المستوي XOY ذلك أن $\overline{OI}$ متجه موضع I في OXY ثابت الطول ومتغير الاتجاه في OXY لهذا فإن I ترسم في OXY دائرة مركزها O ونصف قطرها L هي المنحني القاعدة. و.هـ.م.

II - ط - أ - الرسم (25)

$P = \theta\cos\varphi$

ب - سطح القاعدة ... مخروط ...

المتدحرج ... مخروط ...

تمت بعون الله

III - الحل اسام ل $y'^2 = p^2(a^2-y^2)(b^2+y^2)$ ؛ يبدو حلان $y=0$ لي عندما $y=\pm a$

أولاً إن حلول المعادلة خط دوري في المجال $-a \le y \le a$ حيث اعتبرنا $0<a$

نحول المعادلة إلى معادلة ليجندر الناقصة وفق المراحل:

نجري التحويل الأول: $y = az$ حيث $-1 \le z \le 1$

فنحصل على:

$$z'^2 = p^2(1-z^2)(b^2+a^2z^2)$$

نجري التحويل الثاني: $1-z^2 = x^2$ فنحصل على

$$x'^2 = p^2(b^2+a^2)(1-x^2)\left(1-\frac{a^2}{b^2+a^2}x^2\right)$$

(10)

وهذه هي معادلة ليجندر الناقصة فيها

$$0 < \lambda^2 = \frac{a^2}{b^2+a^2} < 1$$

$$\omega^2 = p^2(b^2+a^2)$$

وحلها الدال:

(10) $$x = sn(p\sqrt{b^2+a^2}\,t+\beta)$$

حيث β ثابت تكامل نحصل عليه من شروط البدء.

نعوض في التحويل الثاني نجد:

$$z = \sqrt{1-x^2} = cn(p\sqrt{b^2+a^2}\,t+\beta)$$

نعوض في التحويل الأول نجد:

$$y = a\,cn(p\sqrt{b^2+a^2}\,t+\beta)$$

وهذا الحل دوري ودوره

(5) $$T = \frac{2\pi}{p\sqrt{b^2+a^2}}F\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 1, \frac{a^2}{b^2+a^2}\right)$$

وسعته $2a$ ، وهو المطلوب.

[illegible]

[illegible]

[illegible]

جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات
سنة ثالثة

الدورة التكميلية ٢٠٠٩ - ٢٠١٠
ميكانيك ٢

س١ - اقرأ ما يلي بإمعان ثم أجب عن الأسئلة اللاحقة: [70]

أ - قضيب يتحرك في الفضاء الثلاثي الأبعاد حول نقطة ثابتة منه واقعة في أحد طرفيه.

ب - قضيب يتحرك في المستوي بحيث يتحرك طرفاه على محورين متعامدين.

جـ - مكعب يتحرك في الفضاء الثلاثي الأبعاد حول رأس ثابت من رؤوسه.

د - صفيحة مستطيلة الشكل تتحرك حول رأس ثابت من رؤوسها وأحد أضلاعها يبقى ملازماً لمستوٍ أفقي ثابت oxy.

هـ - قرص دائري يتحرك في المستوي الشاقولي الثابت بحيث يتدحرج بدون انزلاق على مستقيم أفقي ثابت وواقع في مستوي الحركة.

المطلوب: ما عدد الوسطاء المستقلة الكافية لتعيين أوضاع كل جسم من و سمِّ هذه الوسطاء وبيّنها في الرسم المناسب.

س٢ - صفيحة مستطيلة الشكل متجانسة كتلتها m وطولها a وعرضها $2L$ [24]

١ - أوجد I_x, I_y, I_z حيث ox محمول على طولها و oy محمول على عرضها و oz ناظم و o أحد رؤوسها.

س٣ - قضيب AB يتحرك في المستوي oxy بحيث A يلازم ox و B يلازم oy. أوجد منحني القاعدة والمتدحرج وذلك بالطريقة التحليلية. [26]

طول القضيب $2l$

انتهت الأسئلة

مدرس المقرر: د. ...

سلم تصحيح ميكانيك "الصفحتان" -١-
تكميلية ٢٠٠٦ - ٢٠٠٧

أ - م يعد والوسطاء المستقلة الثلاثة لتعيين حركة قضيب يتحرك حول طرفه الثابت هو اثنان وهما: φ الترنح ، θ التأرجح حيث أن القضيب لا يتمتع بدوران ذاتي. (٦)

ب - تعيين حركة قضيب يستند طرفاه على محورين متعامدين بوسيط [منفرد] واحد هو θ (٦)

ج - تعيين حركة مكعب يتحرك حول رأسه الثابت بثلاثة وسطاء مستقلة هي φ ترنح ، ψ دوران ذاتي ، θ تأرجح (زوايا أولر) (٦)

د - تعيين حركة صفيحة مستطيلة حول رأسها الثابت والتي يتحرك ضلعها في oxy بوسيطين مستقلين هما φ ترنح ، θ تأرجح (٦)

هـ - تعيين الحركة المستوية لقرص يتدحرج بدون انزلاق على مستقيم واقع في مستوي الحركة بوسيط واحد x فاصلة مركز القرص أو φ زاوية دوران القرص حول مركز القرص. (٦)

ج ٢ [24]

من تعريف عزم العطالة بالنسبة لمحور

$I_x = \int r^2 dm \quad ; \quad r = y$ (بعد الجسم العنصري عن ox) و $dm = \rho\, ds = \rho\, dx\, dy$

(٧) $= \rho \int y^2 ds = \rho \int_0^{2L} y^2 dy \int_0^{4L} dx = \rho \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^{2L} \cdot [x]_0^{4L} = \frac{\rho}{3} 64 L^3 \ldots = \frac{\rho(4L \cdot 2L)}{3} 16 L^2$

$I_x = \frac{16 m L^2}{3} \quad ; \quad m = \rho S = \rho\, 8 L^2$

وبنفس الطريقة

(٨) $I_y = \int r^2 dm \quad ; \quad r = x$ (بعد الجسم العنصري عن oy) $= \frac{\rho}{3} [x^3]_0^{2L} \cdot [y]_0^{4L} = \frac{\rho\, 8 L^3 \cdot 4L}{3} = \frac{\rho(2L \cdot 4L)}{3} \cdot 4L^2 = \frac{4 m L^2}{3}$

$= \rho \int x^2 ds = \rho \int_0^{2L} x^2 dx \int_0^{4L} dy$

وبما أن الجسم صفيحة مستوية و oz ناظمي عليها

(٨) $I_z = I_x + I_y = \underline{20 m L^2}$

20

جـ: نأخذ منتصف القضيب O_1 قطباً

$X(O_1) = L\sin\theta \ , \ Y(O_1) = L\cos\theta$

حيث $|AB| = 2L$ زمناً.

(6)

- لتعيين المنحني المتدحرج تحليلياً علينا أولاً إيجاد احداثيات المركز الآني للدوران $X_1(I), Y_1(I)$ في المستوي المتحرك:

$$X_1(I) = \frac{-[\vec{V}(O_1)]_{Y_1}}{\dot\theta} \ , \quad Y_1(I) = \frac{[\vec{V}(O_1)]_{X_1}}{\dot\theta} \qquad (1)$$

وهذا يتطلب حساب $\vec{V}(O_1)$ بدلالة مركباته على المحاور المتماسكة لذلك نعود بالمحاور الثابتة (في الجملة الثابتة)

$$\vec{V}(O_1) = \dot{X}(O_1)\,\vec{i} + \dot{Y}(O_1)\,\vec{j} = \dot\theta L\cos\theta\,\vec{i} - \dot\theta L\sin\theta\,\vec{j}$$

ومن جهة أخرى

$$\vec{V}(O_1) = [\vec{V}(O_1)]_{X_1}\vec{i}_1 + [\vec{V}(O_1)]_{Y_1}\vec{j}_1$$

وحسابهما نجد:

(8)

$$[\vec{V}(O_1)]_{X_1} = \dot\theta L\cos^2\theta - \dot\theta L\sin^2\theta = \dot\theta L(1-2\sin^2\theta) = \dot\theta L\cos 2\theta$$

$$[\vec{V}(O_1)]_{Y_1} = -\dot\theta L\sin\theta\cos\theta - \dot\theta L\sin\theta\cos\theta = -2L\dot\theta\sin\theta\cos\theta = -L\dot\theta\sin 2\theta$$

نعوض في (1) فنجد:

$$X_1(I) = L(1-2\sin^2\theta) \ , \quad Y_1(I) = -2L\sin\theta\cos\theta$$

أو:

(4)

$$X_1(I) = L\cos 2\theta \ , \quad Y_1(I) = -L\sin 2\theta$$

وبحذف الوسيط نجد أن معادلة المنحني المتدحرج هي $X_1^2(I) + Y_1^2(I) = L^2$ وبالتالي فالمنحني المتدحرج هو دائرة مركزها القطب O_1 ونصف قطرها يساوي L

- لتعيين المنحني القاعدة تحليلياً نعين احداثيات المركز الآني للدوران في الجملة الثابتة:

$$X(I) = X(O_1) - \frac{\dot{Y}(O_1)}{\dot\theta} \ , \quad Y(I) = Y(O_1) + \frac{\dot{X}(O_1)}{\dot\theta}$$

وبالتالي:

(8)

$$X(I) = L\sin\theta + L\sin\theta = 2L\sin\theta$$

$$Y(I) = L\cos\theta + L\cos\theta = 2L\cos\theta$$

وبحذف الوسيط نجد أن معادلة المنحني القاعدة هي $X^2(I) + Y^2(I) = 4L^2$.

أي أن القاعدة دائرة مركزها O ونصف قطرها $2L$

جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر التحليل ٢
لطلاب السنة الثالثة رياضيات

العلامة: ٨٠
المدة: ساعتان

عماد أرناؤوط
١٥٥٦٤

أجب عن الأسئلة الآتية:

س١: اذكر الوسطاء المستقلة مع التعليل وتوضيح ذلك بالرسم المناسب لكل من الجمل الثانية:

[30] ١- قضيب يتحرك في المستوي. ٢- قضيب يتحرك في المستوي بحيث يتحرك مركزه على مستقيم ثابت. ٣- قضيب يتحرك بحيث أحد طرفيه على محور شاقولي وطرفه الآخر على مستوٍ أفقي. ٤- جملة مادية مكونة من القضيبين OA و BC المتحركين في المستوي OXY حيث O مفصل ثابت و الطرف A يتمفصل مع القضيب BC في مركز كتلته.
٥- صفيحة مستطيلة الشكل فيها أحد رؤوسها ثابت
٦- صفيحة مستطيلة الشكل فيها أحد رؤوسها ثابت وضلعها الطويلة تبقى في المستوي الأفقي.

س٢: OXYZ جملة محاور إحداثية ثابتة (قائمة ومباشرة) و C محيط الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها R وأحد أقطارها يقع على المحور الشاقولي OZ

[27] ولتكن M نقطة مادية تتحرك على C بحركة متغيرة بانتظام قيمة سرعتها الزاوية $\dot{\varphi}=\omega t$ وبنفس الوقت يدور C حول OZ بدوران منتظم حيث $\vec{\Theta}=\omega\vec{k}$ ثابت.
إذا علمت أن M كانت في لحظة البدء على المحور OX وأنها تحركت نحو الأعلى.

فالمطلوب:

١- تعيين إحداثيات M في الجملة الثابتة بدلالة الزمن t.
٢- تعيين سرعة وتسارع M اعتماداً على تركيب الحركات.

س٣: ليكن S مخروط دوراني كتلته M وارتفاعه h ونصف قطر قاعدته R.
[23] أوجد: I_x، I_y، I_z علماً أن OZ منطبق على حامل الارتفاع و O مركز القاعدة.

مع تمنياتي لكم بالنجاح
مدرس المقرر: د. [illegible]

انتهت الأسئلة
حمص في / / / ٢٠٠٧

لا تنسى حل نظرية (١) من هنا

(٨)

(1)

سلم تصحيح امتحان الميكانيك ٢ / ١

سنة ثالثة / الفصل الثاني ٢٠٠٦ - ٢٠٠٧

(أربع صفحات)

حماد الأرناؤوط

أبو شبال

30

- الوسطاء المستقلة لحركة قضيب في مستو: الحركة مستوية دون أية قيود تتعين بثلاثة وسطاء مستقلة هي احداثيات C مركز الكتل: (X,Y) و θ زاوية دوران القضيب حول C

(5)

- الوسطاء المستقلة لحركة قضيب في مستو علماً أن مركز كتله يتحرك على مستقيم ثابت هي وسيطان مستقلان X فاصلة C مركز الكتل و θ زاوية دوران القضيب حول C حيث اخترنا المحور OX محمولاً على المستقيم الثابت الذي يتحرك عليه C حيث انخفضت درجة الحرية درجة واحدة بسبب قيد بجهة واحدة

(5)

- تتعين حركة القضيب الذي يستند طرفه A على OX (الأفقي) ويستند طرفه B على OY (الشاقولي) بالوسطاء (X,Y) و $(\widehat{CX},\widehat{CB})=\theta+\frac{\pi}{2}$ زاوية دوران القضيب حول C لكن $Y=\frac{l}{2}\cos\theta$ و $X=\frac{l}{2}\sin\theta$ وبالتالي احداثيات مركز الكتل C وزاوية الدوران حول C جميعها تتبع لـ θ المبينة في الشكل وبالتالي فالوسيط المستقل الوحيد هو θ.

(5)

- المجموعة مكونة من قضيبين كما في الشكل وتتعين حركتها في المستوي بالوسيطين المستقلين θ و φ لأن احداثيي مركز كتل القضيب OA يتبعان لزاوية دورانه حول O (وهي θ) واحداثيي مركز كتل القضيب BC يتبعان لزاوية دوران القضيب OA حول O (وهي θ) حيث D مركز كتل OA:

$X(D)=\frac{|\overline{OA}|}{2}\cos\theta$, $Y(D)=\frac{|\overline{OA}|}{2}\sin\theta$; A مركز كتل BC

$X(A)=|\overline{OA}|\cos\theta$, $Y(A)=|\overline{OA}|\sin\theta$;

واما φ زاوية دوران القضيب BC حول مركز كتلته

(5)

- الصفيحة المستطيلة تتعين بزاويتي الترنح φ والتأرجح θ المستقلتين فقط لأن الصفيحة جسم صلب يتحرك حول نقطة ثابتة (احد رؤوسه) ونفرض عليها القيد: ضلعها يبقى في المستوي الأفقي فالغي دورانها الذاتي

$\varphi=(OX,OX_1)$

$\theta=(OZ,OZ_1)$

(5)

- تتعين حركة الصفيحة المستطيلة الشكل حول رأسها الثابت بزوايا أولر المستقلة θ التأرجح و φ الترنح و ψ الدوران الذاتي لأنها تتحرك كجسم صلب حول نقطة ثابتة دون أية قيود أخرى

$\psi=(OX_1,OX)$

(5)

2 - عماد أرناؤوط أبو بكار

ملاحظة: يكفي الطالب أن يحسب السرعة والتسارعات بدلالة مركباتها في جملة مقارنة واحدة (في المتماسكة أو الثابتة) فقط

ح: نأخذ OXYZ جملة ثابتة فيها OZ شاقولي

و $OX_sY_sZ_s$ جملة متماسكة مع محيط الدائرة C

وفيها OZ_s منطبق على OZ. كما في الشكل حيث C يقع في المستوي OX_sZ_s.

ط:

$$\vec{OM} = R\cos\varphi\,\vec{i}_s + R\sin\varphi\,\vec{K}_s \quad , \quad \vec{K}_s = \vec{k}$$

$$X_s = R\cos\varphi \quad , \quad Y_s = 0 \quad , \quad Z_s = R\sin\varphi$$

وبالإسقاط على محاور OXYZ نجد:

$$X = R\cos\varphi\cos\theta = R\cos\frac{\omega t^2}{2}\cos\omega t$$

$$Y = R\cos\varphi\sin\theta = R\cos\frac{\omega t^2}{2}\sin\omega t$$

$$Z = R\sin\varphi = R\sin\omega t$$

$$\varphi = \int\dot{\varphi}\,dt = \int\omega t\,dt = \frac{\omega}{2}t^2 + c_1$$

$$\theta = \int\dot{\theta}\,dt = \int\omega\,dt = \omega t + c_2$$

ومن شروط البدء نجد أن $c_1 = c_2 = 0$.

ط: أولاً سرعة M:

طريقة أولى في الجملة المتماسكة مع C

$$\vec{V}(M) = \vec{V}_r + \vec{V}_e$$

$$\vec{V}_r = \dot{X}_s\vec{i}_s + \dot{Y}_s\vec{j}_s + \dot{Z}_s\vec{K}_s = -R\dot{\varphi}\sin\varphi\,\vec{i}_s + R\dot{\varphi}\cos\varphi\,\vec{K}_s$$

العلاقة نسبية

$$\vec{V}_e = \vec{\dot{\theta}}\wedge\vec{OM} = \dot{\theta}\,X_s\,\vec{j}_s = R\dot{\theta}\cos\varphi\,\vec{j}_s$$

$$\vec{V} = -R\dot{\varphi}\sin\varphi\,\vec{i}_s + R\dot{\theta}\cos\varphi\,\vec{j}_s + R\dot{\varphi}\cos\varphi\,\vec{K}_s$$

$$\vec{V} = -R\omega t\sin\frac{\omega t^2}{2}\,\vec{i}_s + R\omega\cos\frac{\omega t^2}{2}\,\vec{j}_s + R\omega t\cos\frac{\omega t^2}{2}\,\vec{K}_s$$

طريقة ثانية في الجملة الساكنة

ويمكن الحصول عليها بدلالة مركباتها على المحاور الثابتة وذلك بتعويض ونفس الخطوات

$$\vec{i}_s = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j} \quad , \quad \vec{j}_s = -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j} \quad , \quad \vec{K}_s = \vec{k}$$

فنحصل على

$$\vec{V} = (-R\dot{\varphi}\sin\varphi\cos\theta - R\dot{\theta}\cos\varphi\sin\theta)\vec{i} + (-R\dot{\varphi}\sin\varphi\sin\theta + R\dot{\theta}\cos\varphi\cos\theta)\vec{j} + R\dot{\varphi}\cos\varphi\,\vec{k}$$

أي:

$$V = \left(-R\omega t\sin\frac{\omega t^2}{2}\cos\omega t - R\omega\cos\frac{\omega t^2}{2}\sin\omega t\right)\vec{i} + \left(-R\omega t\sin\frac{\omega t^2}{2}\sin\omega t + R\omega\cos\frac{\omega t^2}{2}\cos\omega t\right)\vec{j} + R\omega t\cos\frac{\omega t^2}{2}\,\vec{k}$$

(27)

3

$\vec{V}_r = -R\dot{\varphi}\sin\varphi\cos\theta\,\vec{i} - R\dot{\varphi}\sin\varphi\sin\theta\,\vec{j} + R\dot{\varphi}\cos\varphi\,\vec{k}$

$\vec{V}_e = \dot{\theta}\,\vec{k}\wedge(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}) = -\dot{\theta}y\,\vec{i} + \dot{\theta}x\,\vec{j}$

$= -\dot{\theta}R\cos\varphi\sin\theta\,\vec{i} + \dot{\theta}R\cos\varphi\cos\theta\,\vec{j}$

عماد أرناؤوط

ط: ثانياً تسارع M:

طريقة أولى في الجملة المتماسكة (٢)

$\vec{\Gamma} = \vec{\Gamma}_r + \vec{\Gamma}_e + \vec{\Gamma}_c$

$\vec{\Gamma}_r = \ddot{x}_s\vec{i}_s + \ddot{y}_s\vec{j}_s + \ddot{z}_s\vec{k}_s$

$\ddot{x}_s = -R\ddot{\varphi}\sin\varphi - R\dot{\varphi}^2\cos\varphi\ ,\quad \ddot{y}_s = 0\ ,\quad \ddot{z}_s = R\ddot{\varphi}\cos\varphi - R\dot{\varphi}^2\sin\varphi$

$\vec{\Gamma}_e = \ddot{\theta}\wedge\vec{OM} - \dot{\theta}^2\,\vec{mM}$; (m مسقط M على oz)

$= \ddot{\theta}\,\vec{k}_s\wedge(x_s\vec{i}_s + y_s\vec{j}_s + z_s\vec{k}_s) - \dot{\theta}^2(x_s\vec{i}_s + y_s\vec{j}_s)$

$= \ddot{\theta}x_s\vec{j}_s - \dot{\theta}^2x_s\vec{i}_s = R\ddot{\theta}\cos\varphi\,\vec{j}_s - \dot{\theta}^2R\cos\varphi\,\vec{i}_s = -\dot{\theta}^2R\cos\varphi\,\vec{i}_s + R\ddot{\theta}\cos\varphi\,\vec{j}_s$

$\vec{\Gamma}_c = 2\dot{\theta}\,\vec{k}_s\wedge\vec{V}_r = -2\dot{\theta}R\dot{\varphi}\sin\varphi\,\vec{j}_s$

$\vec{\Gamma} = (-R\ddot{\varphi}\sin\varphi - R\dot{\varphi}^2\cos\varphi - \dot{\theta}^2R\cos\varphi)\vec{i}_s + (R\ddot{\theta}\cos\varphi - 2R\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\varphi)\vec{j}_s$

$+ (R\ddot{\varphi}\cos\varphi - R\dot{\varphi}^2\sin\varphi)\vec{k}_s$; و $\dot{\varphi} = \omega t,\ \ddot{\varphi} = \omega,\ \dot{\theta} = \omega,\ \ddot{\theta} = 0$

$\vec{\Gamma} = (-R\omega\sin\frac{\omega t^2}{2} - R\omega^2t^2\cos\frac{\omega t^2}{2} - R\omega^2\cos\frac{\omega t^2}{2})\vec{i}_s - 2R\omega^2t\sin\frac{\omega t^2}{2}\,\vec{j}_s$

$+ (R\omega\cos\frac{\omega t^2}{2} - R\omega^2t^2\sin\frac{\omega t^2}{2})\vec{k}_s$

9

طريقة ثانية في الجملة الثابتة

ويمكن إعادة العمل بالحساب بدلالة مركبات التسارعات على محاور الجملة الثابتة.

$\vec{k}_s = \vec{k}$ و $\ddot{y}_s = y_s = 0$;

$\vec{\Gamma}_r = \ddot{x}_s(\cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}) + \ddot{z}_s\vec{k}$

$= -R(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi)(\cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}) + R(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi)\vec{k}$

$\vec{\Gamma}_e = \ddot{\theta}\,\vec{k}\wedge(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) - \dot{\theta}^2(x\vec{i} + y\vec{j}) = -\ddot{\theta}y\,\vec{i} + \ddot{\theta}x\,\vec{j} - \dot{\theta}^2x\,\vec{i} - \dot{\theta}^2y\,\vec{j}$

$= -(\ddot{\theta}y + \dot{\theta}^2x)\vec{i} + (\ddot{\theta}x - \dot{\theta}^2y)\vec{j}$, $\theta = \omega t \Rightarrow \dot{\theta} = \omega,\ \ddot{\theta} = 0$

$= -\dot{\theta}^2R\cos\varphi\cos\theta\,\vec{i} - R\dot{\theta}^2\cos\varphi\sin\theta\,\vec{j}$

$\vec{\Gamma}_c = -2\dot{\theta}[\vec{V}_r]_y\,\vec{i} + 2\dot{\theta}[\vec{V}_r]_x\,\vec{j} = +2R\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\varphi\sin\theta\,\vec{i} - 2R\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\varphi\cos\theta\,\vec{j}$

$\vec{\Gamma} = [-R(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi)\cos\theta - \dot{\theta}^2R\cos\varphi\cos\theta + 2R\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\varphi\sin\theta]\,\vec{i}$

$+ [-R(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi)\sin\theta - R\dot{\theta}^2\cos\varphi\sin\theta - 2R\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\varphi\cos\theta]\,\vec{j}$

$+ R(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi)\vec{k}$; $\varphi = \frac{\omega t^2}{2},\ \dot{\varphi} = \omega t,\ \ddot{\varphi} = \omega,\ \theta = \omega t,\ \dot{\theta} = \omega$

4

حساب I_x , I_y , I_z للمخروط حيث $Oxyz$ جملة مقارنة متناسقة معه
O مركز قاعدته و Oz محور تناظره، وهو متجانس. من التعريف:

$$I_x = \int_V (y^2+z^2)\,dm = \rho\int_V (y^2+z^2)\,dV \quad ; V = r\,dr\,dz\,d\varphi$$

$$0 \le r \le \frac{R}{h}(h-z) \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi$$

وفي الإحداثيات الإسطوانية: $x = r\cos\varphi ,\ y = r\sin\varphi ,\ z = z$

$$I_x = \rho\int_0^h \left[\int_0^{\frac{R}{h}(h-z)} r^3\,dr\right] dz \int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\,d\varphi + \rho\int_0^h z^2\left[\int_0^{\frac{R}{h}(h-z)} r\,dr\right] dz \int_0^{2\pi} d\varphi \quad (1)$$

- $$\int_0^{\frac{R}{h}(h-z)} r^3\,dr = \frac{R^4}{4h^4}\left(h^4-4h^3z+6h^2z^2-4hz^3+z^4\right)$$

- $$\int_0^h\left[\int_0^{\frac{R}{h}(h-z)} r^3\,dr\right]dz = \frac{R^4}{4h^4}\int_0^h\left(h^4-4h^3z+6h^2z^2-4hz^3+z^4\right)dz = \frac{R^4h}{20}$$

- $$\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\,d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos 2\varphi\,d\varphi = \pi$$

- $$\int_0^{\frac{R}{h}(h-z)} r\,dr = \frac{R^2}{2h^2}\left(h^2-2hz+z^2\right)$$

- $$\int_0^h z^2\left[\int_0^{\frac{R}{h}(h-z)} r\,dr\right]dz = \frac{R^2}{2h^2}\int_0^h\left(h^2z^2-2hz^3+z^4\right)dz$$
$$= \frac{R^2}{2h^2}\left[\frac{h^5}{3}-\frac{2h^5}{4}+\frac{h^5}{5}\right] = \frac{R^2}{2h^2}\left(\frac{h^5}{30}\right) = \frac{R^2h^3}{60}$$

- $$\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi$$

نعوض في (1) نجد:

$$I_x = \rho\frac{\pi R^2 h}{3}\frac{3R^2}{20} + \frac{\rho\pi R^2 h}{3}\frac{h^2}{10} = \frac{3MR^2}{20} + \frac{Mh^2}{10} = I_y$$

بسبب التناظر $I_x = I_y$

$$I_z = \rho\int_V r^3\,dr\,dz\,d\varphi = \rho\int\left[\int_0^{\frac{R}{h}(h-z)} r^3\,dr\right]dz\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\rho 2\pi}{4}\int_0^h \frac{R^4}{h^4}(h-z)^4\,dz$$

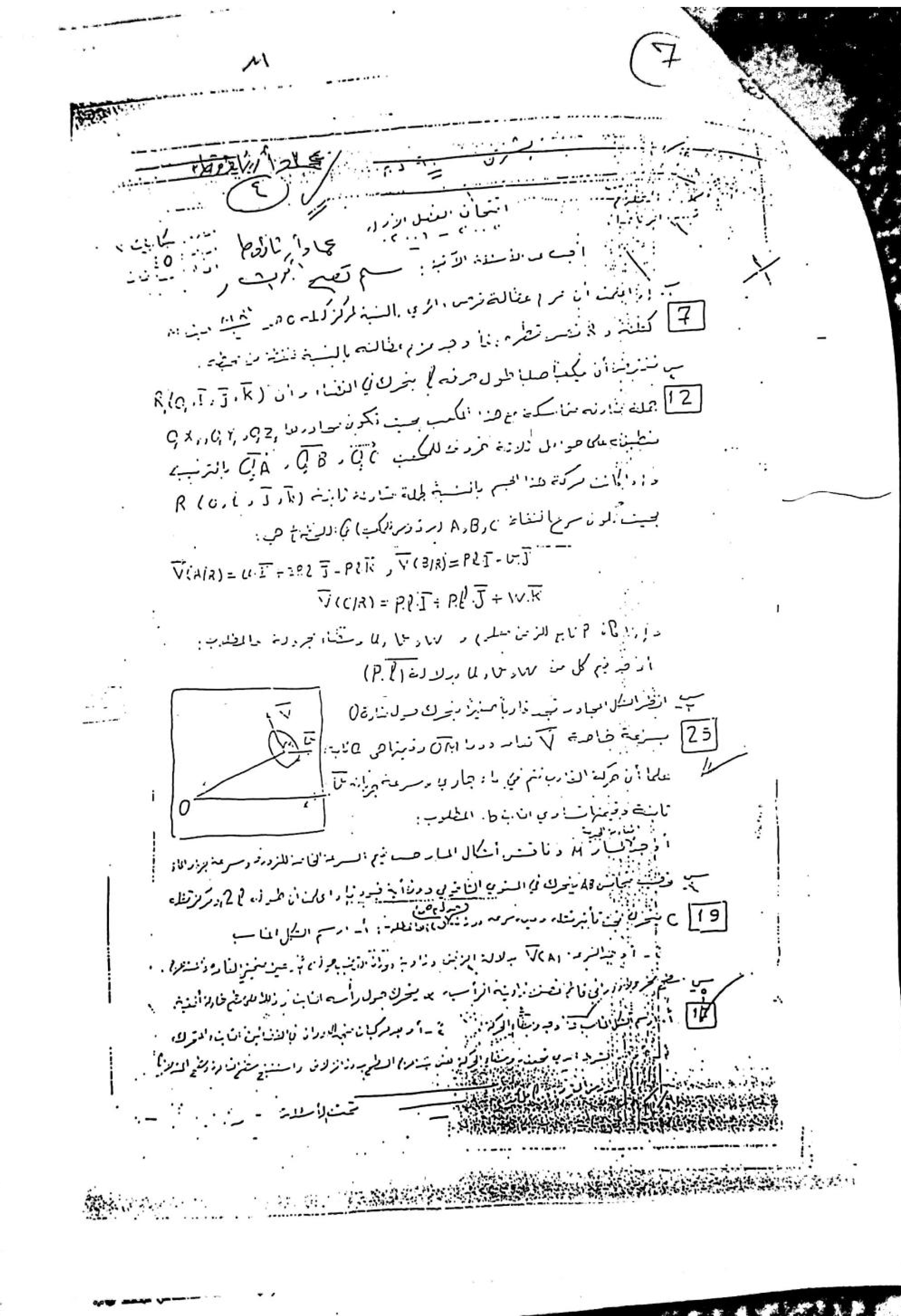
$$= \frac{\rho\pi R^4}{2h^4}\int_0^h\left(h^4-4hz^3+6h^2z^2-4h^3z+z^4\right)dz = \frac{3\rho\pi R^2h}{3}\,\frac{R^2}{10} = \frac{3M}{10}R^2 \quad ; M = \frac{\rho\pi R^2 h}{3}$$

عماد الأرناؤوط

بسلالم الميكانيك والعقري

ومنه نجد: $I_{cx} = I_{cy}$

$2I_o = I_x + I_y + I_z$



امتحان الفصل الدراسي

أجب عن الأسئلة الآتية :

7 أ- ...

12 ب- نفترض أن مكعباً صلباً طول حرفه l يتحرك في الفضاء وأن $R_1(O_1, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ جملة مقارنة متماسكة مع هذا المكعب بحيث تكون محاورها O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1 منطبقة على حوامل ثلاثة أحرف للمكعب $\overline{O_1A}, \overline{O_1B}, \overline{O_1C}$ بالترتيب. ودرسنا حركة هذا الجسم بالنسبة لجملة مقارنة ثابتة $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ بحيث تكون سرع النقاط A, B, C (رؤوس المكعب) في اللحظة t هي:

$$\vec{V}(A/R) = u\vec{i} + 2pl\vec{j} - pl\vec{k} \quad , \quad \vec{V}(B/R) = pl\vec{i} - w\vec{j}$$

$$\vec{V}(C/R) = pl\vec{i} + pl\vec{j} + w\vec{k}$$

وإذا كان p تابع للزمن ... و w, v, u ... المطلوب:

أ- أوجد قيم كل من w, v, u بدلالة (p, l)

25 ب- انظر الشكل المجاور نجد دولاباً ... يتحرك حول نقطة O بسرعة خاصة $\vec{V}$ ... علماً أن حركة ... ثابتة ... المطلوب:

أ- أوجد ...

19 ج- قضيب متجانس AB يتحرك في المستوي ... C يتحرك ... المطلوب: أ- ارسم الشكل المناسب

ب- أوجد السرعة $\vec{V}(A)$ بدلالة ...

17 د- ... يتحرك حول رأسه الثابت ...

أ- ارسم الشكل المناسب ...

انتهت الأسئلة

